

Synteza i realizacja ortogonalnych filtrów cyfrowych 2D o strukturze potokowej

Robert Wirski

Katedra Systemów Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów
Wydziału Elektroniki i Informatyki
Politechniki Koszalińskiej

Plan prezentacji

1. Przetwarzanie danych w systemach cyfrowych
– parametry
2. Przetwarzanie 1D
3. Przetwarzanie 2D
4. Synteza i realizacja systemów ortogonalnych FIR 2D
5. Przykład syntezy systemu do wykrywania krawędzi na obrazie

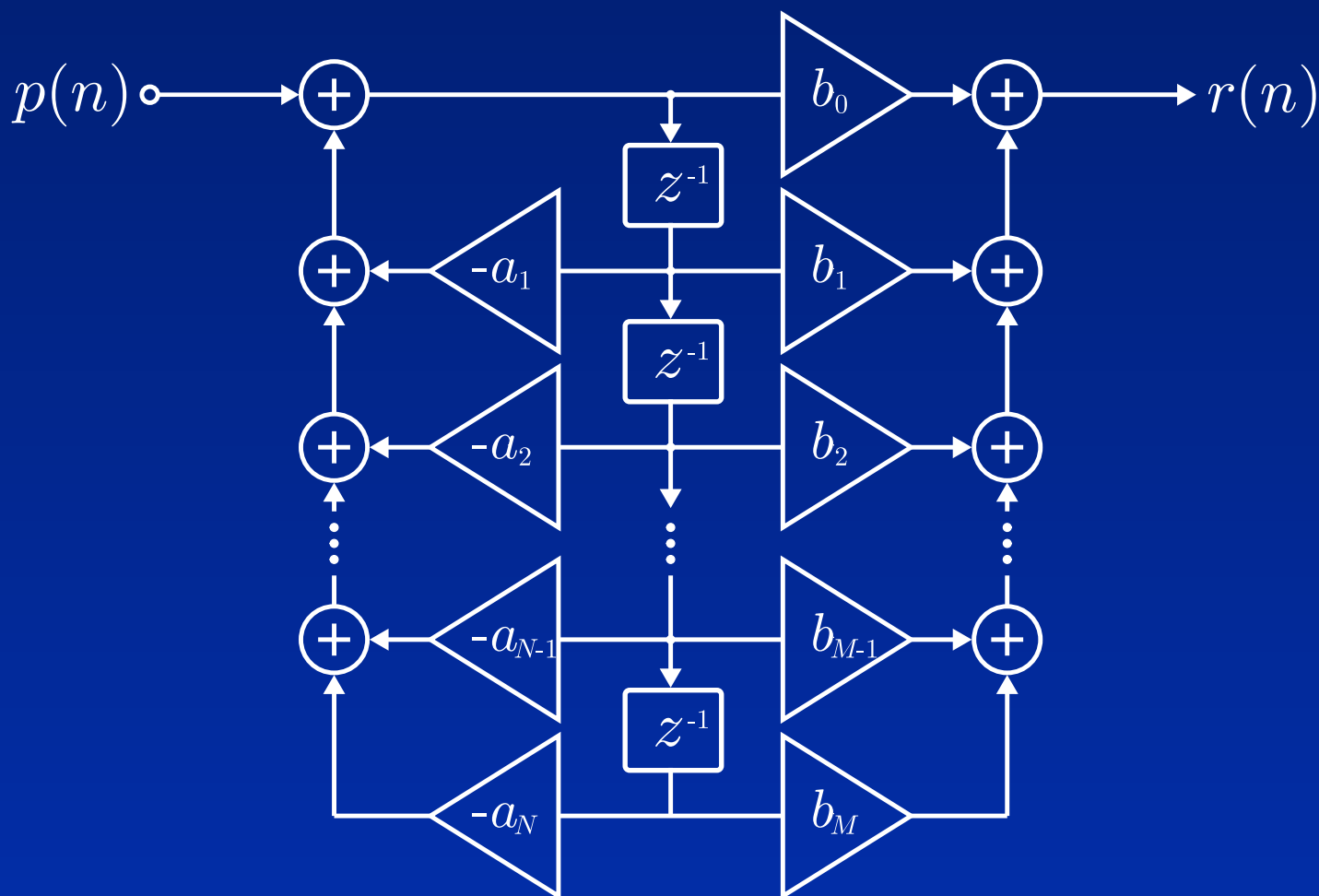
1. Przetwarzanie danych w liniowych systemach cyfrowych – parametry

- organizacja obliczeń (rodzaje struktur)
- widmo mocy szumów i zniekształceń nadmiarowych
- oscylacje pasożytnicze
- wrażliwość charakterystyki amplitudowej

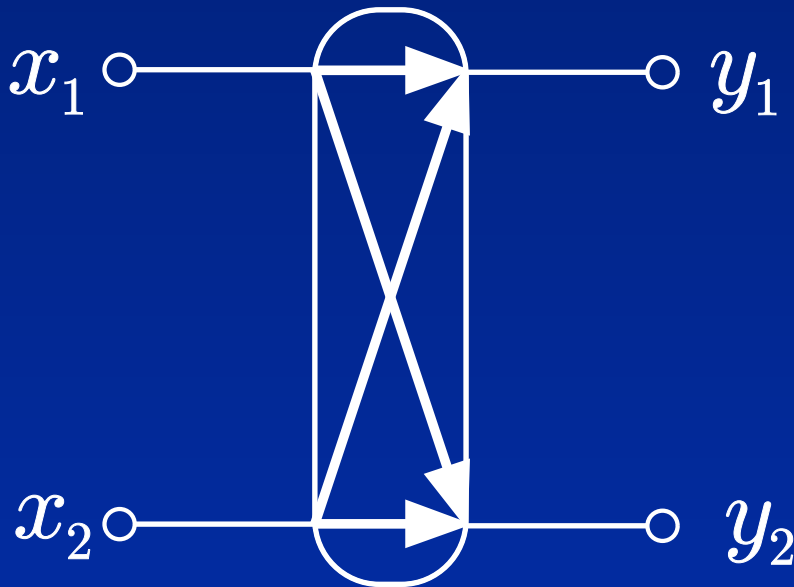
$$S_{\alpha}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{\partial H(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_n}, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (1)$$

2. Przetwarzanie 1D

2. Podejście klasyczne.

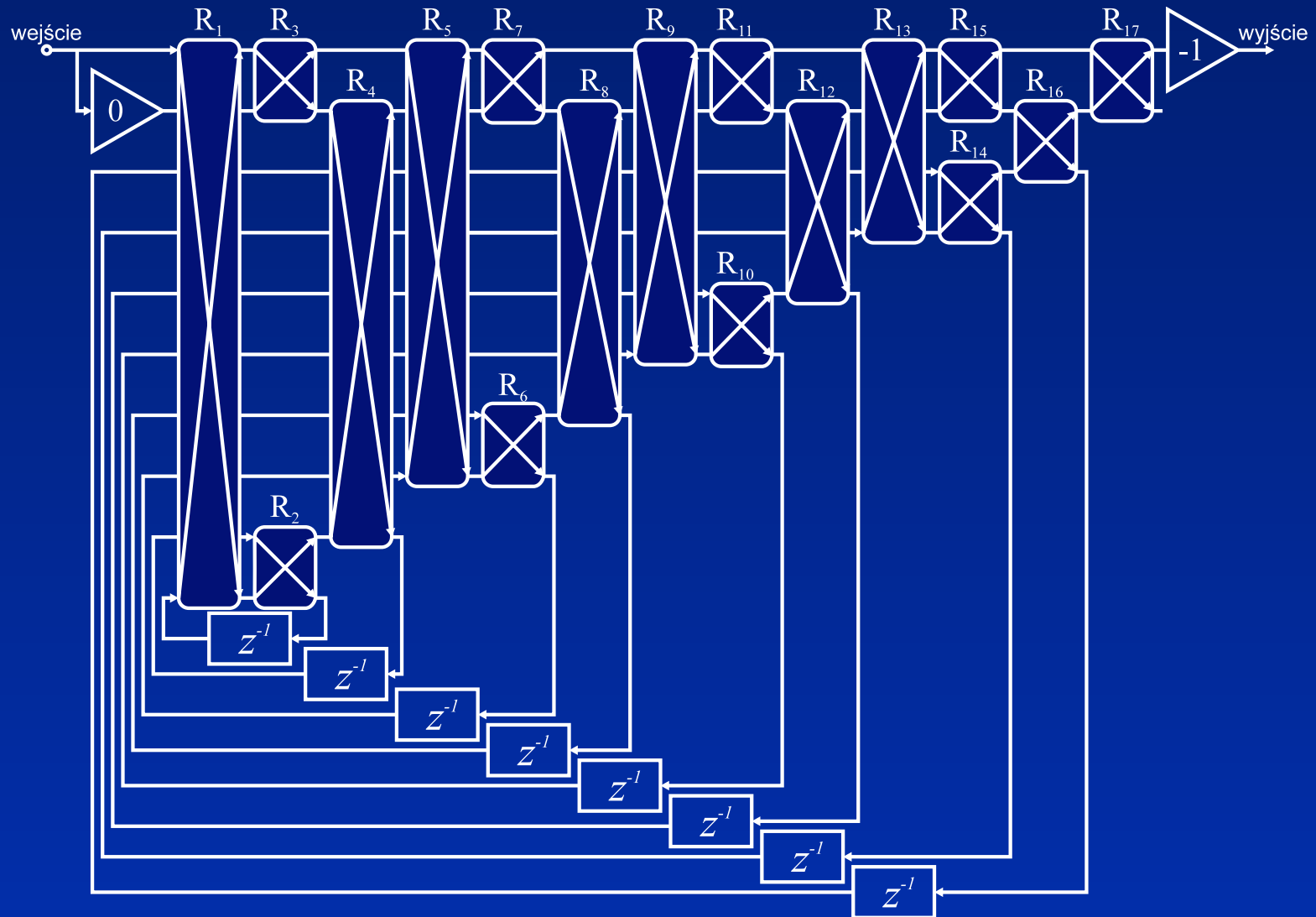


2. Rotator Givens'a.

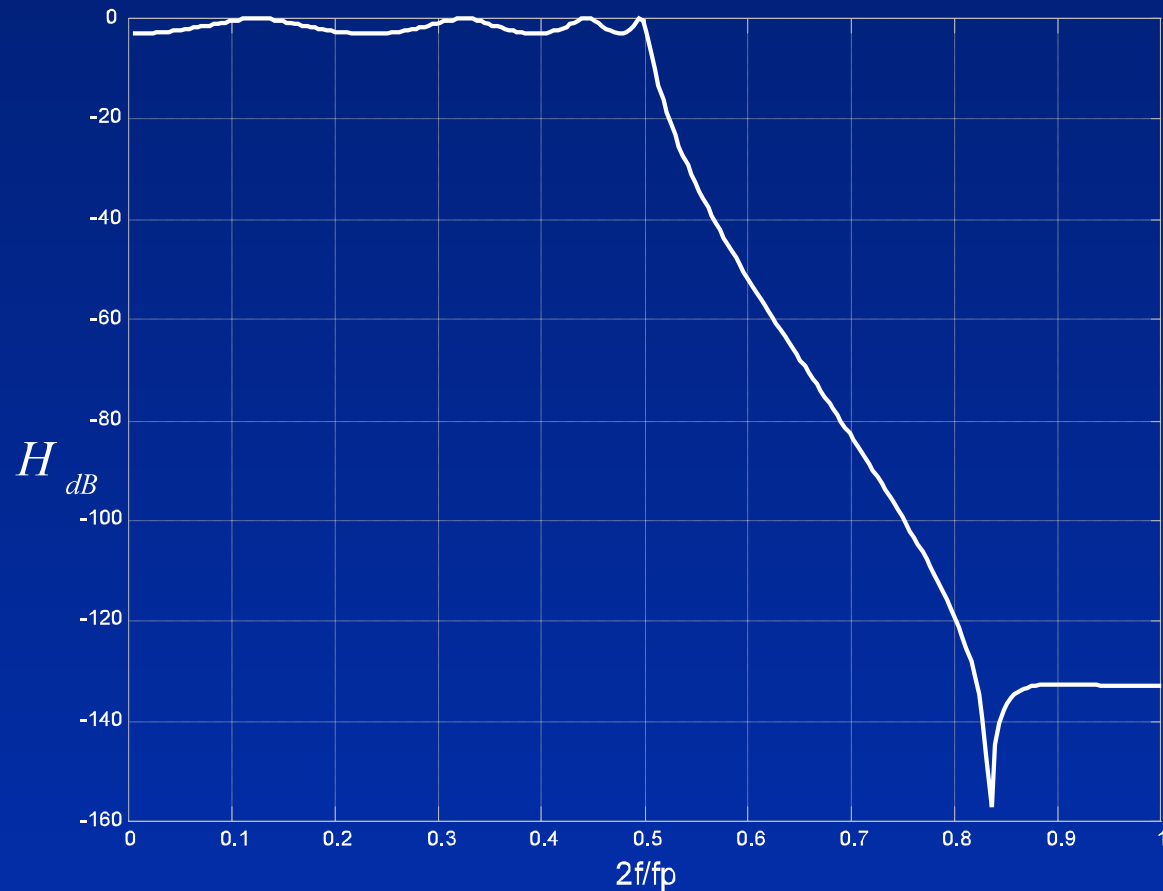


$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

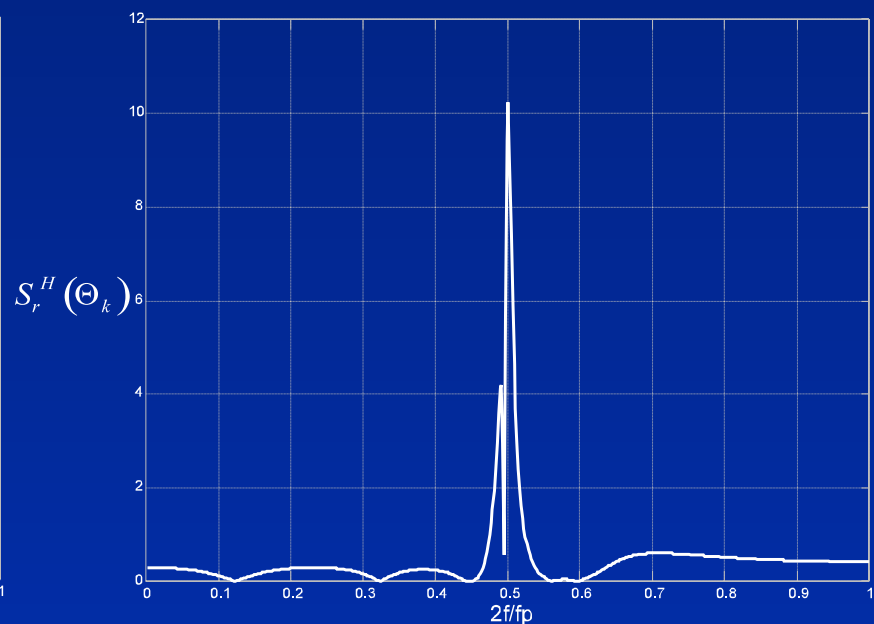
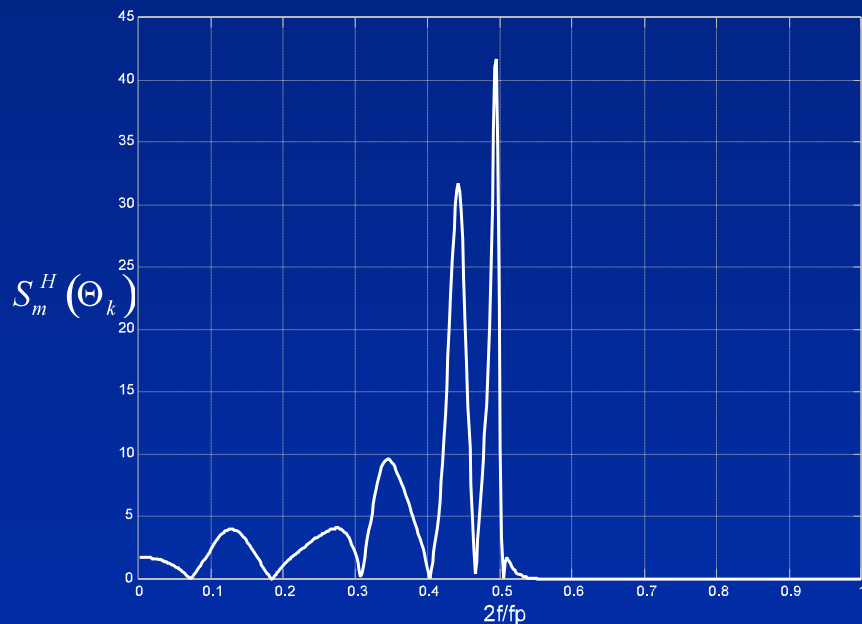
2. Przykładowa struktura rotatorowa 1D.



2. Przykładowa charakterystyka amplitudowa.



2. Przykładowa wrażliwość modułu transmitancji (system klasyczny i ortogonalny).

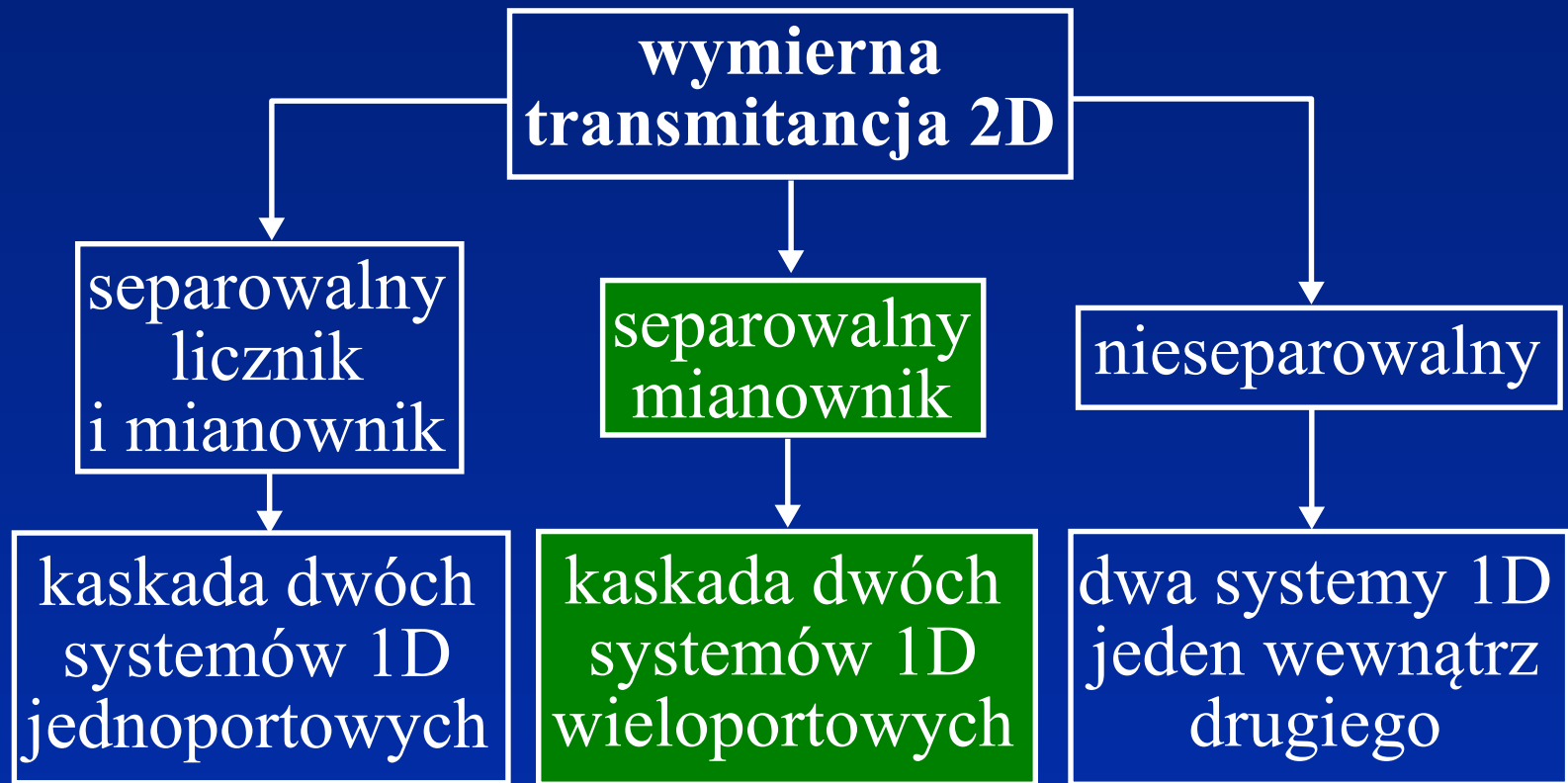


3. Przetwarzanie 2D.

3. Klasyfikacja przetwarzania 2D przez systemy liniowe i stacjonarne.



3. Struktury liniowych i stacjonarnych systemów 2D .



3. Równania stanu 2D – model Roesser'a.

$$\begin{bmatrix} x^h(n+1, n) \\ x^v(n, m+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + Bu(n, m) \quad (2a)$$

$$y(n, m) = C \begin{bmatrix} x^h(n, m) \\ x^v(n, m) \end{bmatrix} + Du(n, m) \quad (2b)$$

Warunki początkowe: $x^h(0, m)$, $x^v(n, 0)$.

3. Systemy ortogonalne 2D.

$$S_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dwuwymiarowy system ortogonalny spełnia $S_2^t S_2 = I$.
Wówczas:

$$E_2\{u(n, m)\} = E_2\{y(n, m)\} \quad (4)$$

gdzie

$$E_2\{x(n, m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^t(n, m)x(n, m) \quad (5)$$

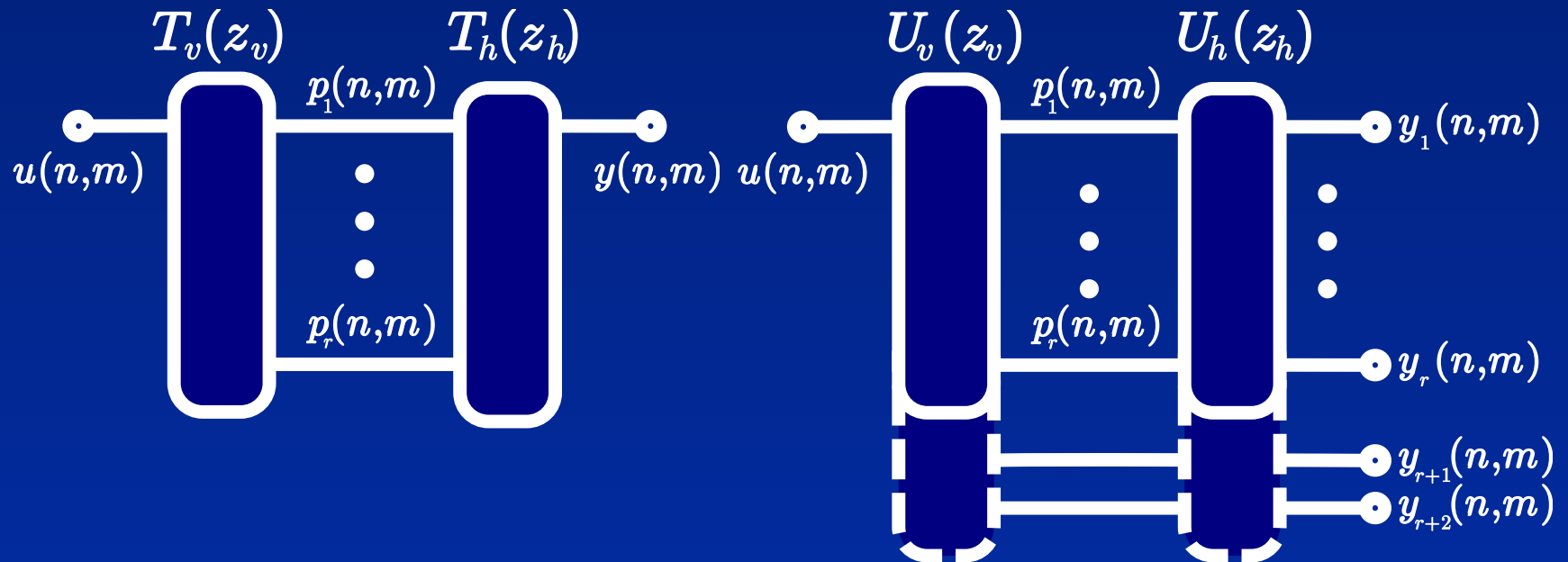
4. Własności systemów ortogonalnych 2D.

- są stabilne BIBO
- spełniają warunek paraunitarności

$$H^t(e^{-j\omega_1}, \dots, e^{-j\omega_n})H(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_n}) = I \quad (6)$$

4. Synteza systemów ortogonalnych FIR 2D.

4. Idea.



4. Algorytm.

Niech będzie dana transmitancja 2-D w postaci

$$T(z_h, z_v) = \frac{Z_h G Z_v}{d_h(z_h) d_v(z_v)} \quad (7)$$

gdzie

$$Z_h = [1 \ z_h^{-1} \ \dots \ z_h^{-k+1}], \ Z_v = [1 \ z_v^{-1} \ \dots \ z_v^{-l+1}]^t;$$

G jest macierzą rzeczywistą o rozmiarze $k \times l$;

$d_h(z_h)$ i $d_v(z_v)$ to wielomiany zmiennych z_h i z_v analityczne dla $|z_h| \geq 1$ i $|z_v| \geq 1$, tzn. $T(z_h, z_v)$ opisuje system stabilny.

4. Faktoryzacja pełnego rzędu macierzy współczynników.

Stałą macierz G można przedstawić w postaci

$$G = G_h G_v, \quad (8)$$

gdzie G_h i G_v są pełnego rzędu o wymiarach odpowiednio: $k \times r$ i $r \times l$. Podstawiając (8) do (7), otrzymujemy

$$T(z_h, z_v) = H_h(z_h) H_v(z_v), \quad (9)$$

gdzie

$$H_h(z_h) = \frac{N_h(z_h)}{d_h(z_h)}, \quad (10)$$

$$H_v(z_v) = \frac{N_v(z_v)}{d_v(z_v)} \quad (11)$$

4. Synteza jednowymiarowa dla 'v'.

$$U_v(z_v) = \frac{1}{d_v(z_v)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_v}} N_v(z_v) \\ F_v(z_v) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

gdzie $F_v(z_v)$ otrzymuje stosując faktoryzację spektralną

$$\begin{aligned} M_v(z_v) &= F_v(z_v^{-1}) F_v(z_v) = \\ &= d_v(z_v^{-1}) d_v(z_v) - \frac{1}{k_v} N_v^t(z_v^{-1}) N_v(z_v). \end{aligned} \quad (13)$$

Stałą k_v w (13) wybiera się tak aby zapewnić nieujemność $M_v(z_v)$, i.e. $M_v(e^{j\omega}) \geq 0$ dla wszystkich ω . Wygodnie jest wybrać

$$k_v = \max H_v^t(e^{-j\omega}) H_v(e^{j\omega}) \text{ dla wszystkich } \omega. \quad (14)$$

4. Synteza jednowymiarowa dla 'h'.

Nie jest możliwa paraunitaryzacja

$$U_h(z_h) = \frac{1}{d_h(z_h)} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_h} N_h(z_v) & 0 & F_h(z_h) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dlatego budujemy system $U_h^t(z_h)$. Podobnie,

$$F_h(z_h^{-1}) F_h(z_h) = d_h(z_h^{-1}) d_h(z_h) - \frac{1}{k_h} N_h^t(z_h^{-1}) N_h(z_h), \quad (16)$$

Po otrzymaniu równań stanu (A, B, C, D) , usuwamy transpozycję poprzez podstawienie: $A_h = A^t$, $B_h = C^t$, $C_h = B^t$ i $D_h = D^t$.

4. Złożenie systemów 'v' i 'h' do modelu Roesser'a.

$$\begin{cases} x_v(n, m+1) = A_v x_v(n, m) + B_v u(n, m) \\ r_v(n, m) = C_v x_v(n, m) + D_v u(n, m) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x_h(n+1, m) = A_h x_h(n, m) + B_h r_v(n, m) \\ r(n, m) = C_h x_h(n, m) + D_h r_v(n, m) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_R &= \begin{bmatrix} A_h & B_h C_v \\ 0_{v \times h} & A_v \end{bmatrix} & B_R &= \begin{bmatrix} B_h D_v \\ B_v \end{bmatrix} \\ C_R &= \begin{bmatrix} C_h & D_h C_v \end{bmatrix} & D_R &= D_h D_v \end{aligned} \quad (19)$$

4. Postać Schura dla macierzy A systemu FIR.

Twierdzenie (Wirski). Jeżeli A jest rzeczywistą macierzą nilpotentną, to istnieje ortogonalna macierz Q taka, że

$$Q^T A Q = N, \quad (20)$$

gdzie N jest rzeczywistą macierzą trójkątną górną.

Konstruktywny dowód rekurencyjnie wykorzystuje własność, która pozwala wyzerować kolumnę macierzy posiadającą zerową wartość własną.

4. Parametryzacja macierzy ortogonalnych.

Dowolną macierz ortogonalną H można przedstawić w postaci

$$H = \prod_{i=1}^I L_{s_i, t_i}(\phi_i) E \prod_{j=1}^J R_{u_j, w_j}(\psi_j), \quad (21)$$

gdzie

$$E = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$L_{s,t}(\phi)$, $R_{s,t}(\phi)$ to rotatory Givensa.

5. Przykład syntezy systemu FIR 2D do wykrywania krawędzi.

5. Maska.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

$$H_h^t(z_h) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_h^{-1} + 0.07178z_h^{-2} \\ 0.26790 + 0.05255z_h^{-1} + 0.26790z_h^{-2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$H_v(z_v) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_v^{-1} + 0.07178z_v^{-2} \\ -0.26790 - 0.05255z_v^{-1} - 0.26790z_v^{-2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Jest to system FIR, w którym $D_h(z_h) = D_v(z_v) = 1$.

5. Transmitancje paraunitarne.

$$H_{vpar}(z_v) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_v^{-1} + 0.07178z_v^{-2} \\ -0.26790 - 0.05255z_v^{-1} - 0.26790z_v^{-2} \\ 0.44876 + 0.27735z_v^{-1} - 0.17141z_v^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$H_{hpar}^t(z_h) = \begin{bmatrix} 0.07178 - 0.73192z_h^{-1} + 0.07178z_h^{-2} \\ 0.26790 + 0.05255z_h^{-1} + 0.26790z_h^{-2} \\ 0 \\ 0.44876 + 0.27735z_h^{-1} - 0.17141z_h^{-2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

5. Równania stanu zmiennej 'v'.

$$\begin{aligned} A_v &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4038 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B_v &= \begin{bmatrix} -0.2638 \\ 0.8075 \end{bmatrix} \\ C_v &= \begin{bmatrix} 0.2202 & -0.8344 \\ -0.8217 & -0.3335 \\ -0.5257 & 0.1717 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_v &= \begin{bmatrix} 0.0718 \\ -0.2679 \\ 0.4488 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

5. Równania stanu zmiennej 'h'.

$$\begin{aligned} A_h &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4038 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B_h &= \begin{bmatrix} -0.86156 & 0.06186 & 0 & 0.32648 \\ 0.04981 & -0.88459 & 0 & 0.44643 \end{bmatrix} \\ C_h &= \begin{bmatrix} -0.8075 & 0.2638 \\ 0.2852 & 0.8732 \\ 0 & 0 \\ 0.5163 & -0.0699 \end{bmatrix} & D_h &= \begin{bmatrix} 0.0718 & 0.2679 & 0 & 0.4488 \\ -0.3817 & 0.1023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3231 & 0.3625 & 0 & 0.7019 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

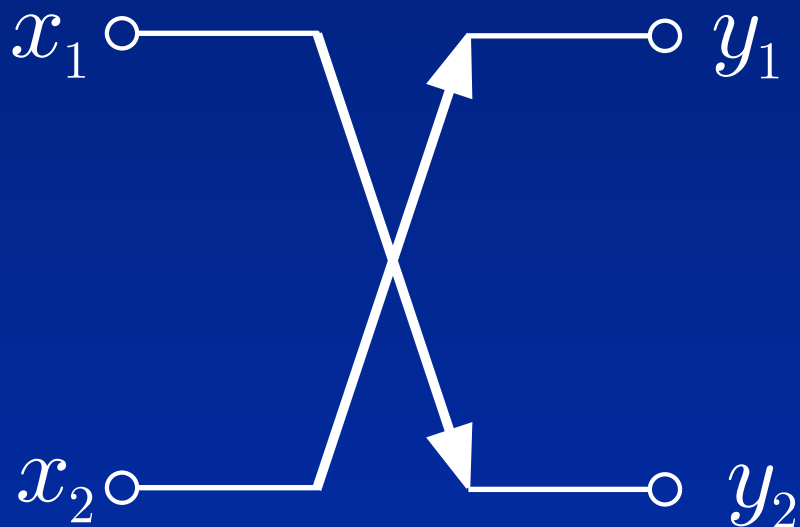
5. Model Roessera.

$$\begin{aligned} A_R &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4038 & 0.4577 & -0.5851 \\ 0 & 0 & 0.6267 & 0.4577 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_R &= \begin{bmatrix} 0.1492 \\ 0.2043 \\ -0.2638 \\ 0.8075 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

5. Model Roessera, cd.

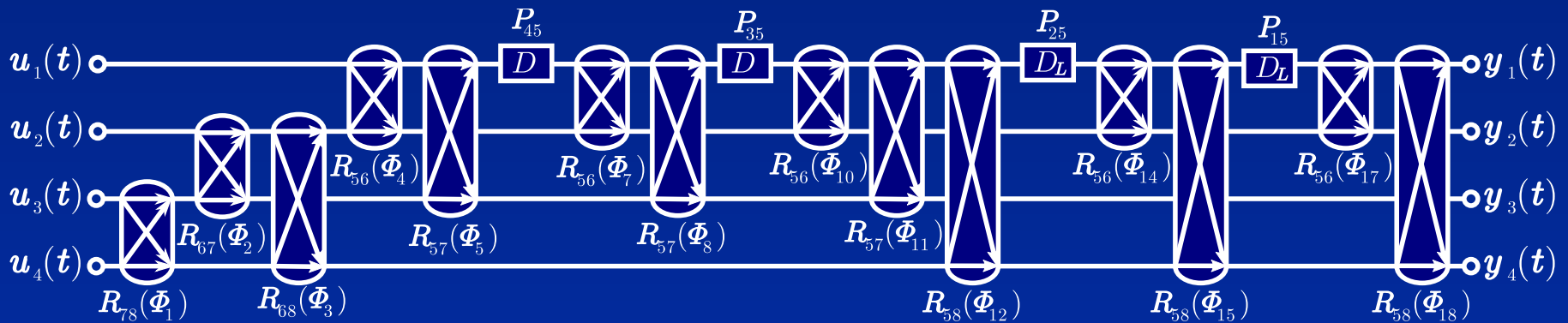
$$\begin{aligned} C_R &= \begin{bmatrix} -0.8075 & 0.2638 & -0.2043 & -0.1492 \\ 0.2852 & 0.8732 & -0.1681 & 0.2844 \\ 0 & 0 & -0.5257 & 0.1717 \\ 0.5163 & -0.0699 & -0.2267 & -0.3905 \end{bmatrix} \\ D_R &= \begin{bmatrix} -0.0666 \\ -0.0548 \\ 0.4488 \\ -0.0739 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

5. Dodatkowy element – permutacja.

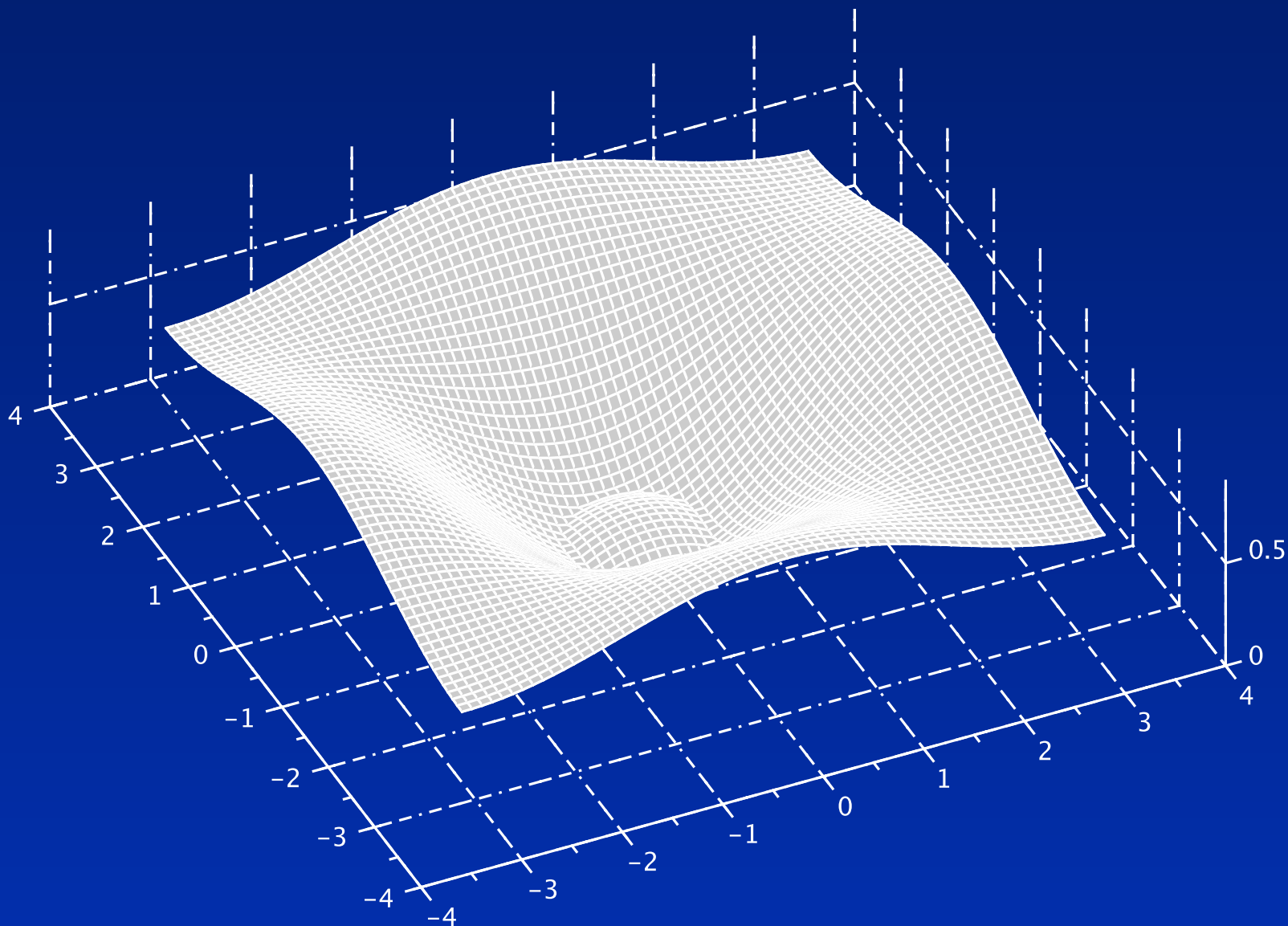


$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

5. Struktura systemu.



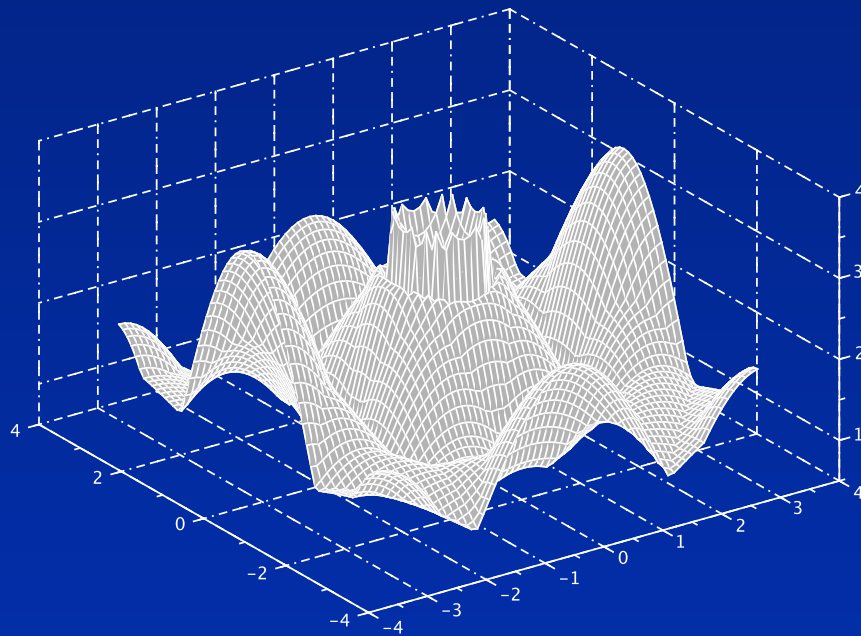
5. Charakterystyka amplitudowa.



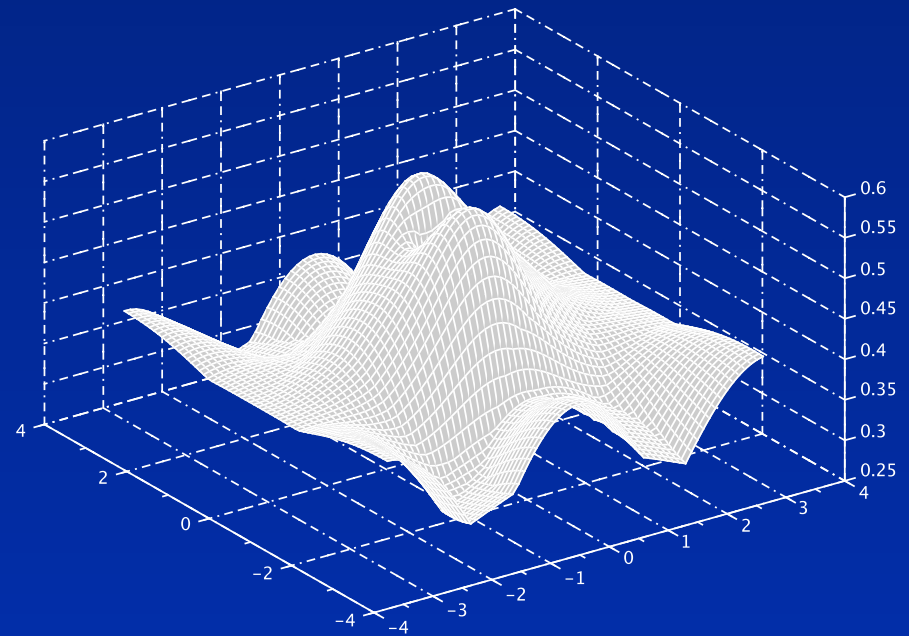
5. Wrażliwość charakterystyki amplitudowej.

$$S_k(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{|A_k(\omega_1, \omega_2) - A_{k+\Delta}(\omega_1, \omega_2)|}{\Delta} \quad (32)$$

struktura bezpośrednia



struktura rotatorowa



5. Obraz testowy.



$u_1(t)$

5. Wynik filtracji.

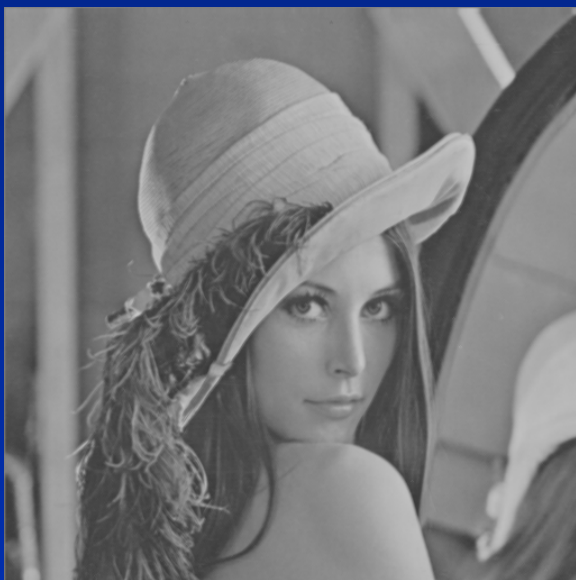
$y_1(t)$



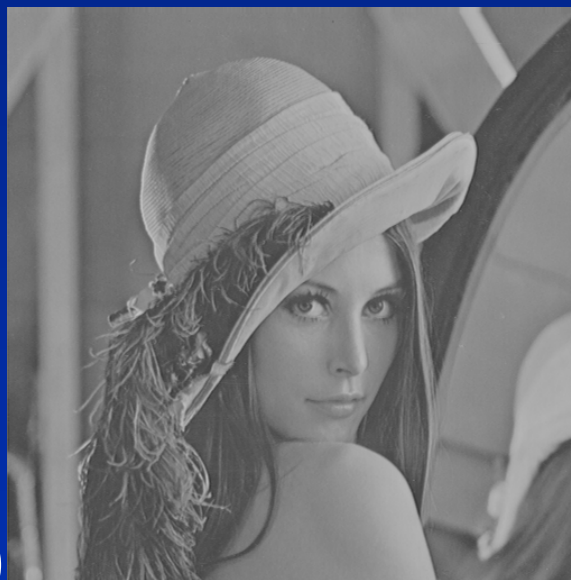
$y_2(t)$



$y_3(t)$



$y_4(t)$



Oryginalne rozwiązania autora

1. Synteza filtrów ortogonalnych FIR 2-D (faktoryzacja pełnego rzędu macierzy współczynników)
2. Dekompozycja macierzy nilpotentnej do trójkątnej górnej (przypadek szczególny algorytmu Schura)
3. Rotatorowa struktura potokowa dla FIR 2-D (przy pomocy macierzy permutacji)